

3.1.2 Zobecnění binomické věty

Newton v roce 1664 [1] zobecnil binomickou větu v řadu do formy nekonečné mocninné řady, platné pro libovolné reálné exponenty. Jde o pravidlo, jak umocnit dvojčlen na libovolnou mocninu, která nemusí být nutně přirozeným číslem.

$$(1 + x)^s = \binom{s}{0} + \binom{s}{1}x + \binom{s}{2}x^2 + \binom{s}{3}x^3 + \dots \quad (1)$$

$$(1 + x)^s = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (2)$$

Zde x a s jsou obecně reálná nebo dokonce komplexní čísla. Tyto nekonečné řady konvergují právě když $|x| < 1$.

Probereme některé speciální případy:

Pro $s = -1$ přejde řada (2) do geometrické řady:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad (3)$$

Pro $x = -x^2$, $s = -1/2$ obdržíme:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots \quad (4)$$

Tato řada přejde po integraci v řadu pro $\arcsin x$. Dosadíme-li v integrované řadě za $x = 1/2$, dostaneme řadu, která konverguje k $\pi/6$. Pomocí tohoto rozvoje této řady Newton vypočetl v roce 1665 s přesností na deset desetinných míst *Ludolfovo číslo* [7].