3.1.6 Numerické řešení nelineárních rovnic Newtonovou metodou

3.1.6.1 Zápis

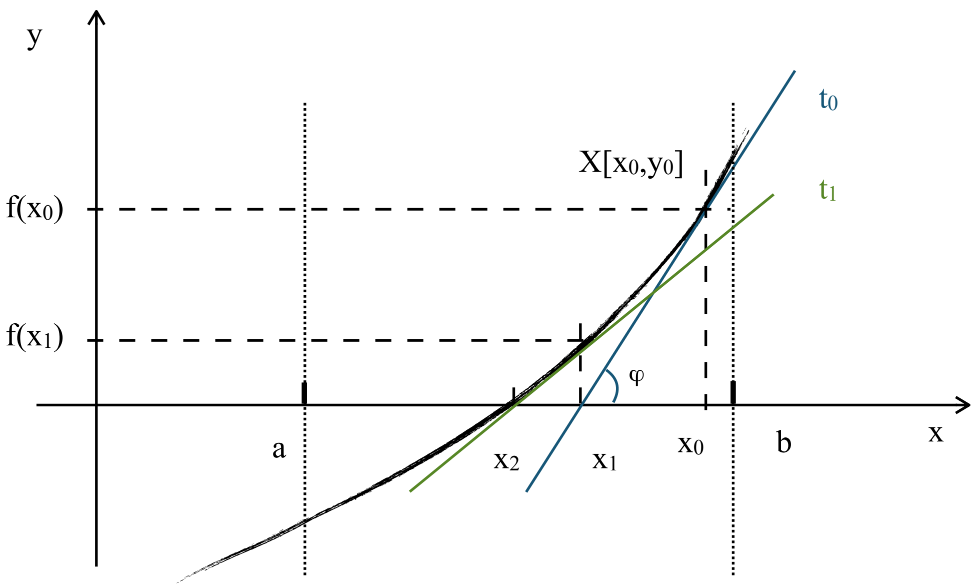
Uvažujme rovnici ve tvaru $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je nějaká „rozumná" funkce reálné proměnné. Budeme hledat reálná čísla α_n, $n = 0, 1, \ldots$ pro která platí $f(\alpha_n) = 0$. Taková čísla nazýváme kořeny rovnice $f(x) = 0$. Předpokladem je, že na intervalu $\langle a, b \rangle$ je právě jeden kořen. Numerický výpočet kořene α spočívá v konstrukci posloupnosti [32]:

$$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} . \qquad (34)$$

Efektivnost metody je dána rychlostí konvergence dané posloupnosti ke kořenu α.

Za numerické řešení budeme považovat takový člen posloupnosti x_k, pro který bude platit, že $|x_k - \alpha| < \varepsilon$. Tím je i předem stanovena velikost chyby [32].

Newtonova metoda pro hledání kořenů rovnice $f(x) = 0$ je založena na názorné geometrické interpretaci, viz obrázek č. 10. Průsečík tečny sestrojené ke grafu funkce v daném bodě x_k s osou x může být lepší aproximací hledaného kořene než x_k samotné. Protože se jedná o aproximaci danou průsečíky tečen s osou x, někdy se používá pro tuto metodu označení **Newtonova metoda tečen.**



Obr. č. 10 Grafické znázornění Newtonovy metody tečen.

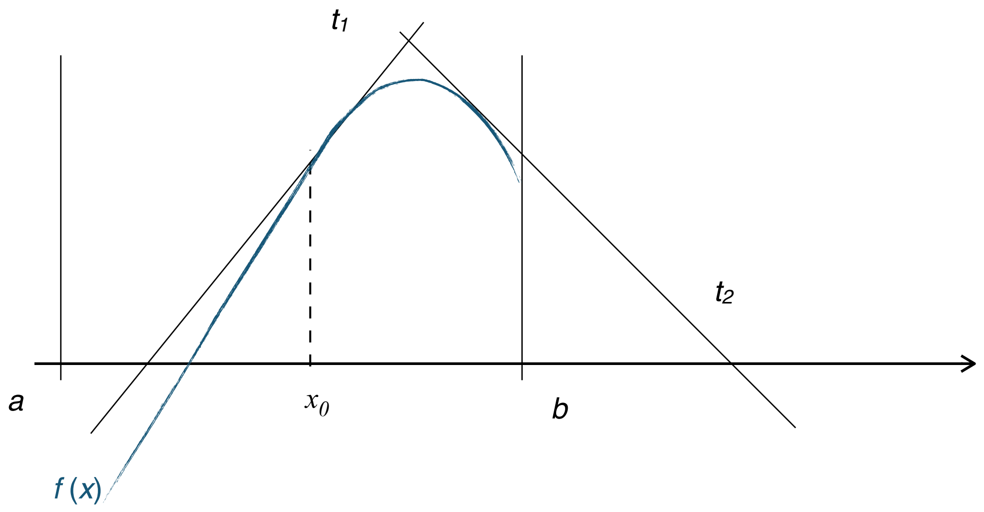
(O) Nechť x_k je k-tá aproximace kořene α. Rovnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_k má tvar [32]:

$$y - f(x_k) = f\,'(x_k)(x - x_k). \tag{35}$$

Průsečík tečny s osou x je bod $x = x_{k+1}$, který je $(k + 1)$ - *ní* aproximací kořene. Do rovnice tečny dosadíme $y = 0$, $x = x_{k+1}$, dostaneme **Newtonův vzorec pro řešení nelineárních rovnic** [32]**:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f\,'(x_k)}\,. \tag{36}$$

Důkaz zde opět provádět nebudeme.



Obr. č. 11 Grafické znázornění Newtonovy metody - špatná volba intervalu $\langle a, b\rangle$.

Tato metoda nemusí vždy konvergovat nebo může konvergovat k jinému kořenu, který leží v jiném intervalu - viz obr. č. 11. Posloupnost iterací definovaná vztahem (36) bude konvergovat ke kořenu α pro rovnici ve tvaru $f(x) = 0$, právě když funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Na témže intervalu platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ a $f\,'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, funkce je ryze monotonní. Dále je funkce na stejném intervalu buď konvexní nebo konkávní, tj. $f\,''(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

Důležitá je u této metody volba bodu x_0 , viz obr. č. . Bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je ten konec, pro nějž platí: $f(x_0) \cdot f\,''(x_0) > 0$. V našem případě je funkce rostoucí a konvexní, takže pro ni platí: $f(x) \cdot f\,''(x) > 0$). Začneme-li v druhém konci, může se stát, že průsečík tečny s osou x je daleko od kořene α.

3.1.6.4 Praktické využití

Newtonovou metodou tečen nalezněte na intervalu ⟨1, 2⟩ přibližnou hodnotu kořene rovnice:

$$x^3 - x - 1 = 0\,. \tag{37}$$

Newtonova metoda bude konvergovat ke koření α za těchto podmínek:

1) Funkce $f(x)$ musí být na intervalu ⟨1, 2⟩ spojitá, funkční hodnoty v koncových bodech musí mít opačná znaménka, tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Ověříme:

$$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1, \qquad f(2) = 2^3 - 2 - 2 = 5, \qquad f(1) \cdot f(2) = -5 < 0 \tag{38}$$

Vyšlo nám, že funkce $f(x)$ je na intervalu ⟨1, 2⟩ je spojitá.

2) Určíme první a druhou derivaci rovnice (37):

$$f'(x) = 3x^2 - 1, \qquad f''(x) = 6x, \tag{39}$$

První a druhá derivace nemění na intervalu ⟨1, 2⟩ své znaménko, v našem případě je:
$f'(x) > 0, f''(x) > 0$. Zároveň $f'(x) \neq 0$.

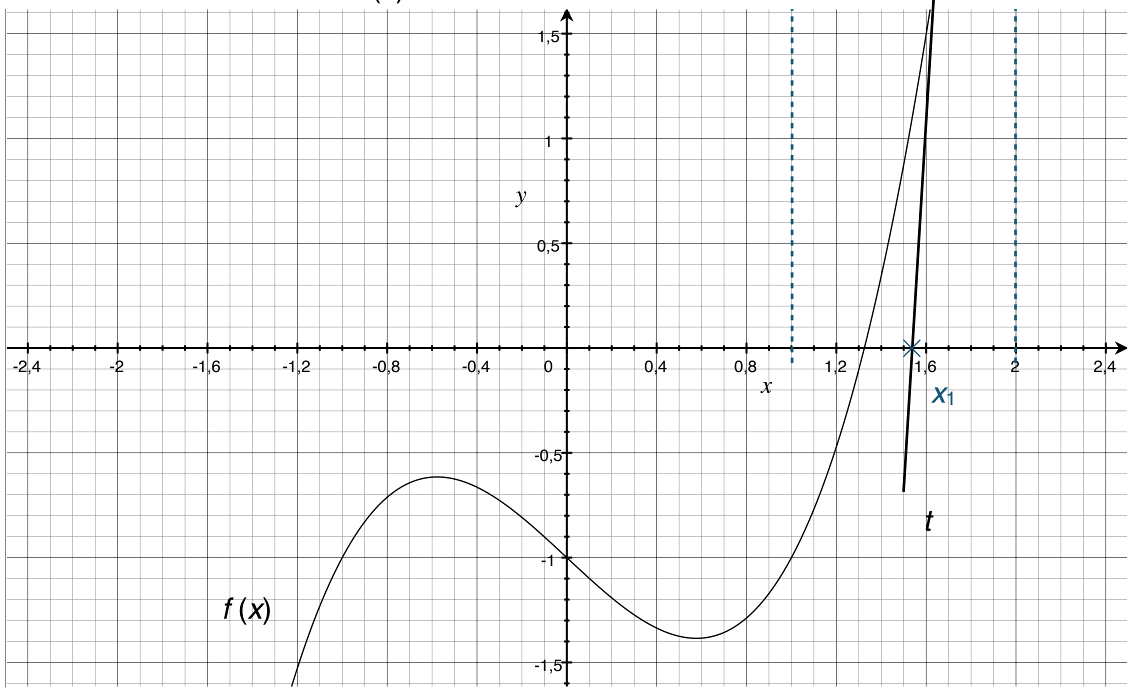
3) Rozhodneme, který ze součinů $f(x) \cdot f''(x)$ je větší než nula. Podle toho zvolíme x_0:

$$f(1) \cdot f''(1) = -1 \cdot 6 = -6 < 0, \qquad f(2) \cdot f''(2) = 5 \cdot 12 = 60 > 0. \tag{40}$$

Vyšlo nám jako výchozí bod $x_0 = 2$. Postupně budeme dosazovat do vzorce (36):
Ukážeme si výpočet bodu x_1. Tento bod je zakreslen i v grafu č. 1.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{5}{11} = \frac{17}{11}\,. \tag{41}$$

Graf č. 1 Zakreslení funkce $f(x) := x^3 - x - 1$



Další body za nás vypočetl rychleji program *Numbers,* viz tabulka č. 4:

Tabulka 4 - hledání kořene α

x_0	2
x_1	1,54545454545455
x_2	1,35961491591518
x_3	1,32580134500585
x_4	1,32471904941713
x_5	1,32471795724586
x_6	1,32471795724475
x_7	1,32471795724475
x_8	1,32471795724475
x_9	1,32471795724475
x_{10}	1,32471795724475

Z tabulky č. 4 je vidět, že již v sedmém kroku jsme se velice přiblížili k hledanému kořeni α.

Přibližná hodnota kořene je α = 1, 324 717 957 244 750.