

3. Mechanika Isaaca Newtona

a) pohybové zákony [43]

Celá klasická mechanika, včetně nebeské mechaniky, je založena na těchto třech zákonech:

Lex. I. Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Každé těleso (o hmotnosti m) setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém (s rychlostí v), pokud není tento stav přinuceno změnit v důsledku sil na něj působících. Tento zákon nazýváme *zákonem setrvačnosti*.

Jestliže je hybnost tělesa $p = mv$, pak platí

Lex. II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Změna hybnosti je úměrná působící síle a odehrává se ve stejném směru, ve kterém tato síla působí.

Za předpokladu, že těleso má konstantní hmotnost, můžeme odvodit tento zákon síly v obvyklém tvaru

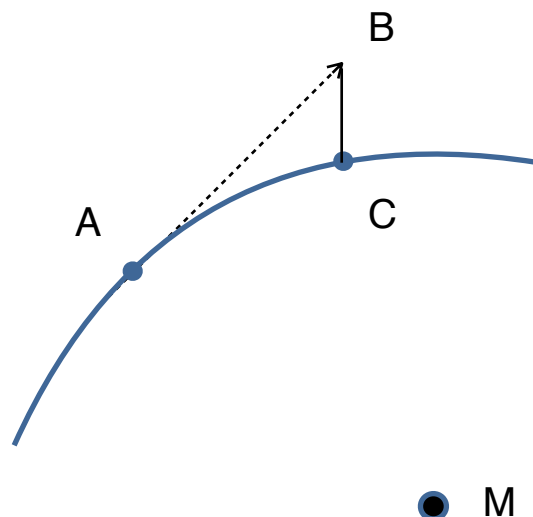
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{dm}{dt} \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} m = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \vec{a} = 0 + m \vec{a} \quad (52)$$

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (53)$$

Lex. III. Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

Proti každé akci vždy působí stejně velká reakce, neboli: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany. Tento poslední zákon nazýváme *zákonem akce a reakce*. Matematicky vyjádřeno:

$$-\vec{F}_1 = \vec{F}_2 \quad (54)$$



Obr. č. 18 Pohyb tělesa v gravitačním poli.
Zdroj [43].

b) centrální síla

Na obr. 18 je znázorněn pohyb tělesa o hmotnosti m v gravitačním poli tělesa o hmotnosti M , $m \ll M$. Pokud by na těleso m v bodě A nepůsobila gravitační síla, pohybovalo by se rovnoměrně přímočaře do bodu B. Gravitační síla vyvolá „pád“ tělesa do bodu C. Kombinací obou pohybů obdržíme křivočarý pohyb, ve speciálním případě pohyb po kružnici [43].

Newton pro tento účel zavedl pojem *centrální* a nezávisle na Huygensovi odvodil její tvar. Planety obíhající kolem Slunce a obecně všechny křivočaré pohyby vyžadují, aby na těleso působila nějaká síla. V případě planet tato síla směřuje k pevnému bodu, ale i všechny obdobné křivočaré pohyby vyžadují, aby ve smyslu zákona setrvačnosti na těleso působila nějaká síla. Tomu vyhovuje představa, že na hmotný bod působí síla, která trvale působí ve směru k jistému bodu. Jde-li o pohyb po kružnici, je tento bod středem kružnice. Síla takto definovaná je síla centrální neboli dostředivá. Tato síla působící na těleso o hmotnosti m pohybující se okamžitou rychlostí v na dráze o poloměru r vyvolá dostředivé zrychlení a_c , které je dáno vztahem [43]:

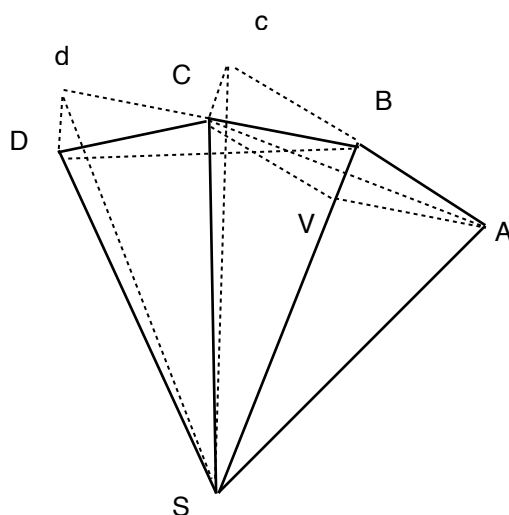
$$a_c = \frac{v^2}{r}, \quad (55)$$

pro centrální sílu platí [43]:

$$\vec{F}_c = m\vec{a}_c = m\frac{v^2}{r}. \quad (56)$$

c) odvození plošné rychlosti

Newton odvozoval všechny vztahy pomocí klasické geometrie. Příkladem může být odvození Keplerova zákona plošné rychlosti. S tímto problémem se na Newtona obrátil Halley, když Sir Christopher Wren ze žertu vypsál cenu pro toho, kdo vyřeší souvislost mezi tíží a tvarem planetárních drah [8].



Obr. č. 19 Odvození plošné rychlosti.
Zdroj [8].

Na těleso, které je v čase $t = 0$ v bodě A , působí dostředivá síla z centra S . V určitém časovém intervalu opíše průvodič tělesa plochu ABS . Kdyby nebylo zrychlení, v druhém stejně velkém časovém intervalu by opsalo plochu BcS . Víme, že $AB = cB \Rightarrow ABS = BcS$. Když se těleso dostane z bodu B , nebude v důsledku dostředivého zrychlení ve směru BV pokračovat po dráze Bc , ale po dráze BC . Úsečky cC a BV jsou rovnoběžné. Trojúhelníky SBC a SBC tak mají společnou stranu SB a stejnou výšku na tuto stranu, neboť protilehlé body c a C leží na rovnoběžce k této straně. Trojúhelníky SBC a SBC se rovnají, neboť mají stejnou základnu a stejnou výšku. Z toho pro obsahy trojúhelníků plyne [8]:

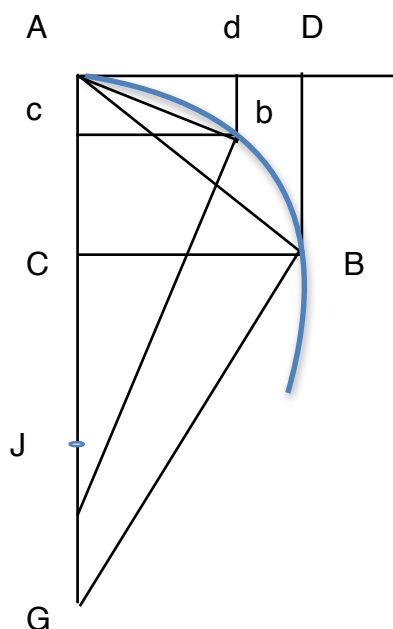
$$BCS = BcS = ABS \quad (57)$$

Pro pohyb v poli centrální síly je tak splněný zákon konstantních ploch. Jak je běžné v integrálním a diferenciálním počtu zjemňováním se dojde k nekonečnému počtu trojúhelníků s nekonečně malými stranami AB , BC , ...

Newton dokázal, že na těleso pohybující se po elipse, musí působit dostředivá síla, která je nepřímo úměrná druhé mocnině vzdálenosti od centra, přičemž toto centrum leží v ohnisku elipsy. Dokázal, že to platí i pro parabolu a hyperbolu [8].

Vlivem dostředivé síly, která se nepřímo úměrně zmenšuje s druhou mocninou vzdálenosti, se těleso pohybuje po kuželosečce. K tomu, aby mohl vyslovit tuto větu použil 28 pomocných vět. Zde si jednu z nich uvedme jako ukázkou, bude to věta č. 11 [8].

Newton dokázal, že dostředivá síla, působící na libovolné těleso pohybující se po zakřivené trajektorii, musí být úměrná průmětu nekonečně malé zakřivené dráhy do průvodiče a nepřímo úměrná druhé mocnině obsahu elementárního trojúhelníku, který je znázorněn na obr. č. 20 [8].



Obr. č. 20 Elementární trojúhelníky.
Zdroj [8].

Těleso se pohybuje po křivce AB . AD je průmět dráhy ve směru tečny, $AC = DB$ je průmět ve směru normály v bodu A , tedy ve směru působení centrální síly. Bodem B vedeme kolmici na sečnu AB , která protne polopřímku AC v bodě G . V bodě b , který je v prostředku oblouku AB , vedeme úsečky $Ac = bd$, $cb = Ad$. Kolmice na sečnu Ab protne přímku AC v bodě g . Necht' se body B, D přibližují k bodu A . posledním průsečíkem kolmice na sečnu se svislicí AC bude bod J . Pro velmi malé GJ je rozdíl $AG - Ag$ zanedbatelně malý. V tomto případě můžeme oblouk AB nahradit kružnicemi nad průmětem AG nebo Ag .

Potom jsou úhly při vrcholu B nebo b pravé. Pak platí [8]:

$$|AB|^2 = |AC| \cdot |AG| = |BD| \cdot |AG| , \quad (58)$$

$$|Ab|^2 = |Ac| \cdot |Ag| = |bd| \cdot |Ag| , \quad (59)$$

Upravíme-li v podíl [8]: $|AB|^2 / |Ab|^2 = |AG| \cdot |BD| / |Ag| \cdot |bd|$. (60)

Protože JG je menší než libovolně zvolená veličina , bude se podíl AG / Ag přibližovat k 1.

Pak[8]:

$$|AB|^2 \div |Ab|^2 = |BD| \div |bd| . \quad (61)$$

$$|AB|^2 / |Ab|^2 = |BD| / |bd| .$$

Tento průmět nekonečně malé dráhy do silového centra je úměrný druhé mocnině délky oblouku. Na nekonečně malé trajektorii je čas úměrný velikosti (obloukové) dráhy. Ze vztahu (63) vyplývá, že velikost BD je úměrná druhé mocnině času. Newton v dalších poučkách dokázal, že dostředivá síla je úměrná průmětu dráhy do směru této síly [8].