

Předpokládejme, že $f(x) \in C^n[a, b]$, x_i , pro $i = 0, \dots, n$ jsou navzájem různá čísla ležící v intervalu $[a, b]$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ takové, že:

$$f^{(n)}(\xi) = n! f[x_0, \dots, x_n] \quad (21)$$

Důkaz zde provádět nebudeme.

Poznámka [32]:

Jestliže lze najít pro $(n + 1)$ -ní derivace funkce f odhad $f^{(n+1)}(\xi) \leq M_{n+1}$ pro všechna $x \in \langle a, b \rangle$, kde M_{n+1} je maximum z $n+1$ -derivace, pak chybu $Ex^\sim$ aproximujeme ohraničením shora a bude pro ni platit:

$$|Ex^\sim| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})| \quad (22)$$

3.1.5 Interpolace na ekvidistantní síti uzlů

Předpokládáme, že body $x_0, \dots, x_n$ jsou ekvidistantní, tj. existuje $h \neq 0$ pro které platí [32]:

$$x_i = x_0 + i h, \quad (23)$$

číslo h nazveme *krokem*. Jestliže uzlové body mají tuto vlastnost, využijeme je k výpočtu koeficientů Newtonova interpolačního polynomu (obyčejné difference).

Obyčejná difference k -tého řádu na množině bodů (x_i, f_i) , pro $i = 0, \dots, n$ definovaná rekurentně vzorcem:

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (24)$$

$$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i. \quad (25)$$

Na ekvivalentní množině uzlů je možné difference nahradit obyčejnými diferencemi.

Platí mezi nimi věta :

Na ekvidistantní množině uzlů (x_i, f_i) , pro $i = 0, \dots, n$ platí:

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}. \quad (26)$$

Důkaz se provádí pomocí matematické indukce.

Nyní dosadíme do vztahu (23) rozdíl $x - x_i$ a získáme tvar (27):

$$x - x_i = x_0 + s h - (x_0 + i h) = (s - i) h . \quad (27)$$

Newtonův interpolační polynom bude mít tvar:

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f_0 + s h f[x_0, x_1] + s(s-1) h^2 f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ \dots + s(s-1) \dots (s-n+1) h^n f[x_0, \dots, x_n] . \end{aligned} \quad (28)$$

Využijeme-li vztah pro obyčejnou a poměrnou diferencí, získáme vztah, o kterém hovoříme jako o **Newtonově interpolačním polynomu pro interpolaci vpřed** [32]:

$$P_n(x_0 + sh) = f_0 + s \frac{\Delta f_0}{1!} + s(s-1) \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \dots + s(s-1) \dots (s-n+1) \frac{\Delta^n f_0}{n!} . \quad (29)$$

Uvažujeme-li uzly v opačném pořadí $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ dostaneme interpolační polynom ve tvaru:

$$P_n(x) = f_n + f[x_{n-1}, x_n] \cdot (x - x_n) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] (x - x_n) \dots (x - x_1) . \quad (30)$$

Opět dosadíme do vztahu (23) rozdíl $x - x_i$ ale tentokrát získá interpolační polynom tvar (32):

$$x - x_i = x_n + s h - (x_0 + i h) = h(n + s - i) . \quad (31)$$

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_n(x_0 + sh) = f_n + s h f[x_{n-1}, x_n] + s(s+1) h^2 f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] + \dots \\ \dots + s(s-1) \dots (s+n-1) h^n f[x_0, \dots, x_n] . \end{aligned} \quad (32)$$

Newtonův interpolační polynom pro interpolaci vzad vypadá takto [32]:

$$P_n(x_n + sh) = f_n + s \frac{\Delta f_{n-1}}{1!} + s(s+1) \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!} + \dots + s(s+1) \dots (s+n-1) \frac{\Delta^n f_0}{n!} . \quad (33)$$